

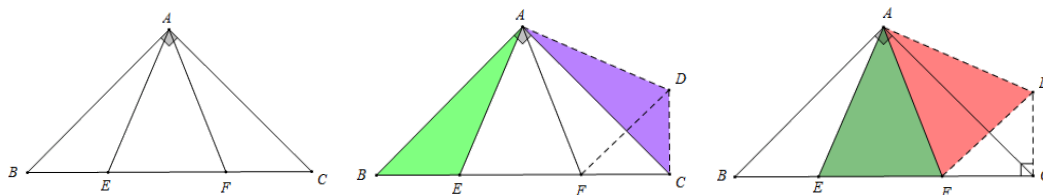
第2讲 旋转基本模型

一、角含半角模型

1. 等腰直角三角形 90° 中含有 45°

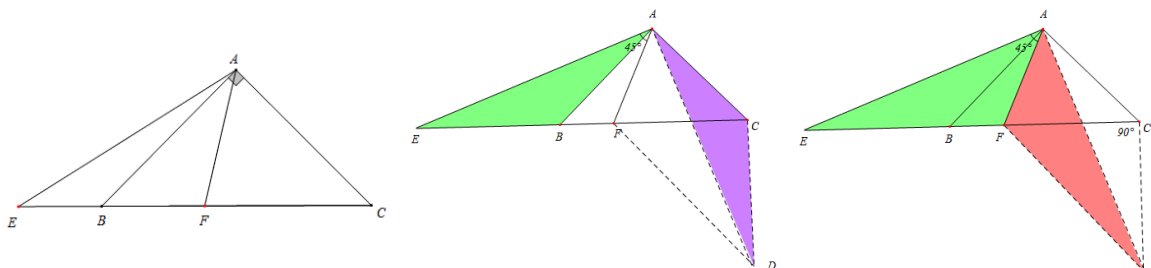
🔗 半角在内向外转

如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



🔗 半角在外向内转

如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle EAF = 45^\circ$ 。

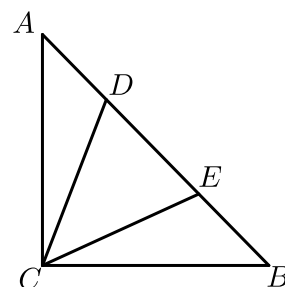


！ 结论： $\triangle ABE \cong \triangle ADE$ ， $EF = BE + CF$ ，
从而推出 $EF = BE + CF$ 。（ BE 、 CF 、 EF 关系）

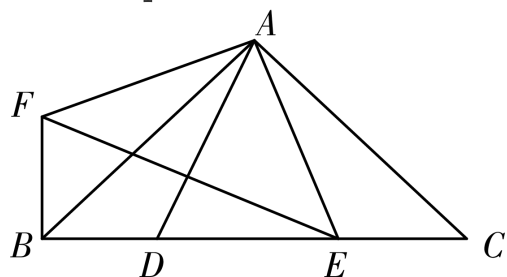
🔗 举个“栗子”

栗子1

- 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4\sqrt{2}$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 上，且 $AD = 2$ ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，那么 $DE =$ _____。



2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， D 、 E 为 BC 上两点， $\angle DAE = 45^\circ$ ， F 为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $FB \perp BC$ ， $FA \perp AE$ ，则下列结论：① $CE = BF$ ；② $BD^2 + CE^2 = DE^2$ ；③ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4} AD \cdot EF$ ；④ $CE^2 + BE^2 = 2AE^2$ ，其中正确的是()

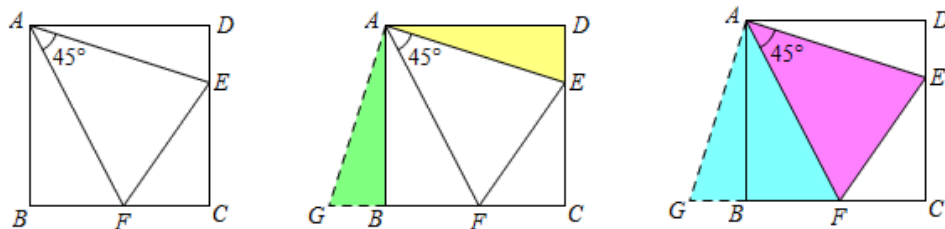


- A. ①②③④ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③

2. 正方形 90° 中含有 45°

半角在内向外转

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



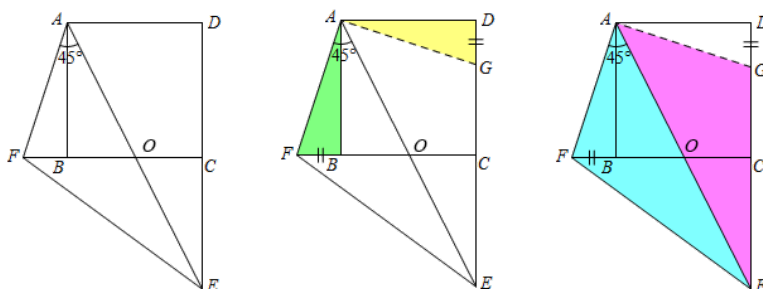
辅助线：延长_____至点 G ，使_____，连接 AG 。“补短法”

! 结论：

- ① 旋转全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ② 对称全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ③ _____ (EF 、 BF 、 DE 的关系)，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的_____。
- ④ _____ 平分 _____，_____ 平分 _____。
- ⑤ 点 A 到 EF 的距离 = _____

半角在外向内转

如图，正方形 $ABCD$ ， $\angle EOF = 45^\circ$ ，旋转 $\angle EOF$ 与 DC 的延长线交于点 E ，与 CB 的延长线交于点 F 。



辅助线：在 CD 截取 _____，连接 AG 。“截长法”

！结论：

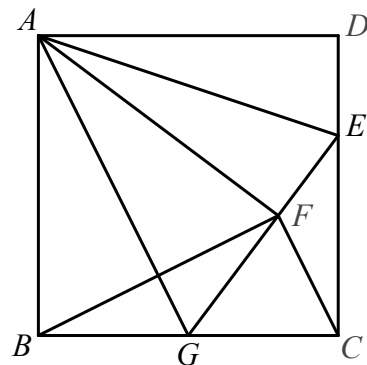
- ① 旋转全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ② 对称全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ③ _____。（ EF 、 BF 、 DE 的关系）
- ④ _____ 平分 _____。

栗子2

3. 如图，有一正方形的纸片 $ABCD$ ，边长为 6，点 E 是 DC 边上一点且 $DC = 3DE$ ，把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠使 $\triangle ADE$ 落在 $\triangle AFE$ 的位置，延长 EF 交 BC 边于点 G ，连接 BF 。有以下四个结论

- ① $\angle GAE = 45^\circ$ ；
- ② $BG + DE = GE$ ；
- ③ 点 G 是 BC 的中点；
- ④ 连接 FC ，则 $BF \perp FC$ 。

其中正确的结论序号是（ ）。



- A. ①②③④ B. ①②③ C. ①② D. ②③

4. 在平面直角坐标系中， O 为原点，边长为 2 的正方形 $OABC$ 的两顶点 A ， C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上，现将正方形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转。

- （1）如图①，当点 A 的对应点 A' 落在直线 $y = x$ 上时，点 A' 的对应坐标为 _____；点 B 的对应点 B' 的坐标为 _____。

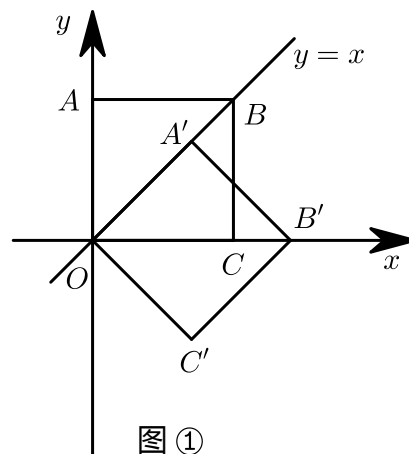


图 ①

(2) 旋转过程中, AB 边交直线 $y=x$ 于点 M , BC 边交 x 轴于点 N , 当 A 点第一次落在直线 $y=x$ 上时, 停止旋转.

① 如图②, 在正方形 $OABC$ 旋转的过程中, 线段 AM , MN , NC 三者满足什么样的数量关系? 请说明理由.

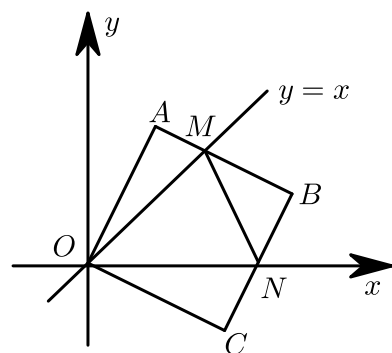
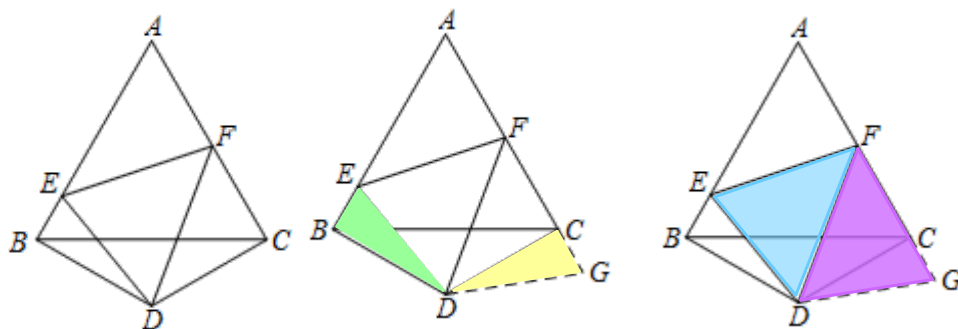


图 ②

② 当 $AC \parallel MN$ 时, 求 $\triangle MBN$ 内切圆的半径 (直接写出结果即可).

3. 等腰三角形 120° 中含有 60°

如图, 已知, 等边 $\triangle ABC$, $DB=DC$, $\angle BDC=120^\circ$, $\angle EDF=60^\circ$.



辅助线: 延长 AC 至 G , 使得_____, 连接 DG .

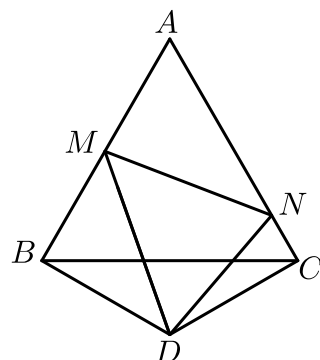
! 结论:

① 旋转全等: _____ $\cong$ _____, $DE =$ _____, $\angle BDE =$ _____,

② 对称全等: 再证 _____ $\cong$ _____, $EF =$ _____,

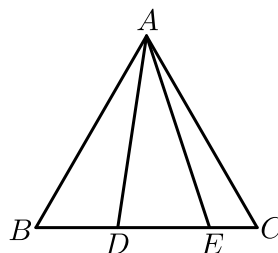
故_____. (EF 、 BE 、 CF 的关系)

5. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 10cm 的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$. 以 D 为顶点作一个 60° 角，使其两边分别交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，连接 MN ，则 $\triangle AMN$ 的周长为 _____ .



变式

6. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 为 BC 边上的点， $BD = 2CE$ ， $\angle DAE = 30^\circ$ ， $DE = 3$ ， CE 的长为 _____ .



独步天下1

7. 解答下列各题 .

(1) 思维探究 :

如图 1，点 E ， F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC ， CD 上，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，则三条线段 EF ， BE ， DF 满足的等量关系式是 _____ ；小明的思路是：将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ABG$ 的位置，并说明点 G ， B ， E 在同一条直线上，然后证明 $\triangle AEF \cong$ _____ 即可得证结论 . (只需填空，无需证明)

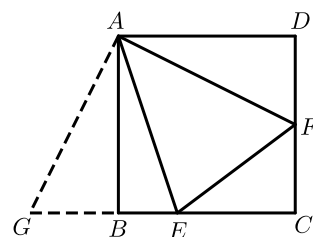


图 1

(2) 思维延伸 :

如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D ， E 均在边 BC 上，点 D 在点 E 的左侧，且 $\angle DAE = 45^\circ$. 猜想三条线段 BD ， DE ， EC 应满足的等量关系，并说明理由 .

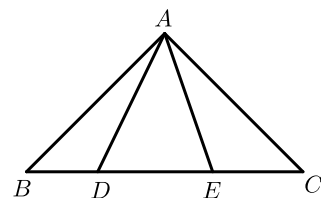


图 2

(3) 思维拓广：

如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB = AC = 5$ ，点 D, E 均在直线 BC 上，点 D 在点 E 的左侧，且 $\angle DAE = 30^\circ$ ，当 $BD = 1$ 时，请直接写出线段 CE 的长。

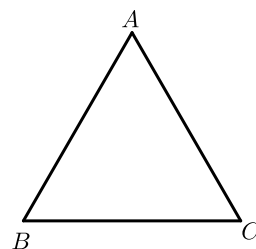
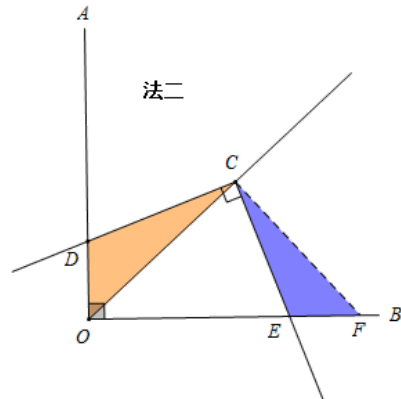
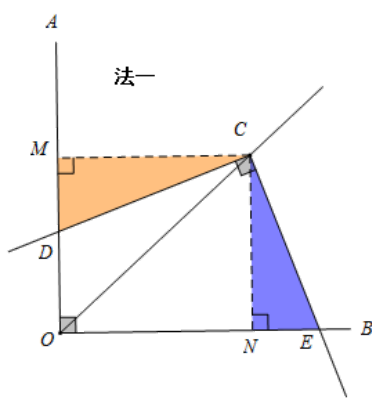
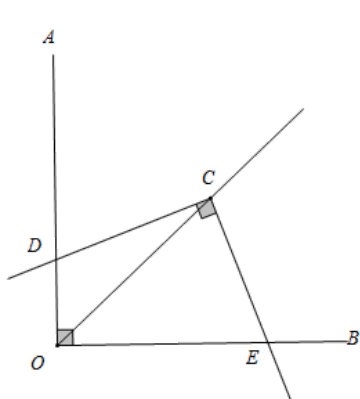


图 3

二、 对角互补模型

如图，已知 $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ， D, E 在 OA, OB 上。



法一：过点 C 作 $CM \perp OD$ 于 M ， $CN \perp OB$ 于 N 。利用 _____ 证明 _____ $\cong$ _____。

法二：将 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° 交 OB 于 F ，利用 _____ 证明 _____ $\cong$ _____。

！ 结论：

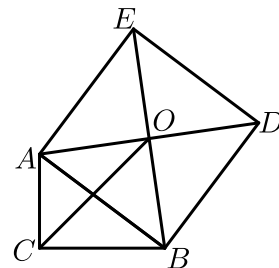
① $CD =$ _____；

② $OD + OE =$ _____ $=$ _____ OC ；

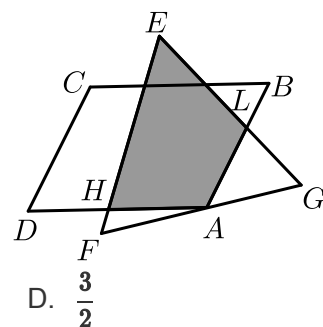
③ $S_{\text{四边形} ODCE} =$ _____。

栗子4

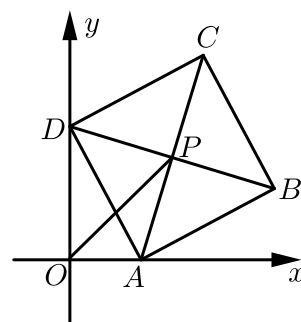
8. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$ ，且正方形对角线交于点 O ，连接 OC ，已知 $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，则 OC 的长为 _____ cm 。



9. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 是等边 $\triangle EFG$ 边 FG 的中点， $\angle B = 60^\circ$ ， $EF = 2$ ，则阴影部分的面积为（ ）。



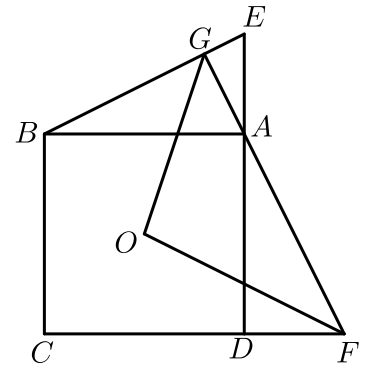
- A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
10. 已知：如图，平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，它的顶点 A 在 x 轴的正半轴上运动，顶点 D 在 y 轴的正半轴上运动（点 A ， D 都不与原点重合），顶点 B ， C 都在第一象限，且对角线 AC ， BD 相交于点 P ，连接 OP 。



- (1) 当 $OA = OD$ 时，点 D 的坐标为 _____， $\angle POA =$ _____ $^\circ$ 。
- (2) 当 $OA < OD$ 时，求证： OP 平分 $\angle DOA$ 。
- (3) 设点 P 到 y 轴的距离为 d ，则在点 A ， D 运动的过程中， d 的取值范围是 _____。

独步天下2

11. 点 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，点 E ， F 分别在 DA ， CD 的延长线上， $AE = DF$ ，连接 BE ， AF ，延长 FA 交 BE 于 G ，连接 OG 。



- (1) 求证： $BE \perp AF$.
- (2) 求 $\angle BGO$ 的度数 .
- (3) 若 $AE = 1$, $AB = 2$, 求 AG 的长 .